MDM-АЛГОРИТМ И ЗАДАЧА СИЛЬВЕСТРА. II*

В. Н. Малозёмов — v.malozemov@spbu.ru
Н. А. Соловьёва — 4vinyo@gmail.com
Г. Ш. Тамасян — grigoriytamasjan@mail.ru

28 сентября 2023 г.

Вторая часть доклада является непосредственным продолжением первой части [1], в которой был описан MDM-алгоритм решения задачи Сильвестра.

5°. Сходимость MDM-алгоритма. Итак, считаем, что

$$\Delta(u_k) > 0 \quad \text{при всех} \;\; k = 0, 1, \ldots \tag{32}$$

Согласно (27) при всех $k = 0, 1, \ldots$ выполняется неравенство

$$Q(u_k) - Q(u_{k+1}) \geqslant \tfrac{1}{2}\delta_k \Delta(u_k). \tag{33}$$

Так как δ_k и $\Delta(u_k)$ положительны, то $Q(u_k) > Q(u_{k+1})$. Получили, что последовательность $\{Q(u_k)\}$ строго убывает. Кроме того, она ограничена снизу наименьшим значением $Q(u)$ на множестве планов U. Значит, последовательность $\{Q(u_k)\}$ имеет предел. Обозначим этот предел через α и запишем

$$\lim_{k\to\infty} Q(u_k) = \alpha. \tag{34}$$

Напомним, что MDM-алгоритм состоит из итераций двух типов — неусеченных (при $\delta_k = \widetilde{\delta}_k$) и усеченных (при $\delta_k < \widetilde{\delta}_k$).

ЛЕММА. *Количество идущих подряд усеченных итераций конечно.*

Доказательство существенно опирается на тот факт, что в последовательности $\{u_k\}$ все планы попарно различны в силу строгого убывания последовательности $\{Q(u_k)\}$.

Пусть итерация с номером k_0 усеченная и далее следуют также усеченные итерации. Согласно (29), при $k \geqslant k_0$ справедливо равенство $\delta_k = u_k[i''_k]$.

*Семинар по оптимизации, машинному обучению и искусственному интеллекту «O&ML» `http://oml.cmlaboratory.com/`

Правило перехода от плана u_k к плану u_{k+1} принимает вид

$$u_{k+1}[i] = \begin{cases} u_k[i'_k] + u_k[i''_k] \quad \text{при } i = i'_k, \\ 0 \quad \text{при } i = i''_k, \\ u_k[i] \quad \text{при остальных } i \in 1:m. \end{cases} \tag{35}$$

По определению, $u_k[i''_k] > 0$. Если $u_k[i'_k] > 0$, то у плана u_{k+1} появляется дополнительная нулевая компонента. При $u_k[i'_k] = 0$ формула (35) упрощается

$$u_{k+1}[i] = \begin{cases} u_k[i''_k] \quad \text{при } i = i'_k, \\ 0 \quad \text{при } i = i''_k, \\ u_k[i] \quad \text{при остальных } i \in 1:m. \end{cases}$$

Ненулевая компонента $u_k[i''_k]$ переместилась на позицию $i = i'_k$, на которой раньше стоял ноль. Количество нулевых компонент не изменилось. Вместе с тем, количество последовательных преобразований, перемещающих положительную компоненту текущего плана на место нулевой компоненты, конечно. Значит, через конечное число усеченных итераций с $u_k[i'_k] = 0$ мы получим план, у которого аналогичная компонента положительна. У следующего плана появится дополнительная нулевая компонента.

Описанный процесс не может быть бесконечным, так как все планы u_k ненулевые.

Лемма доказана. $\square$

Таким образом, MDM-алгоритм может содержать конечные блоки подряд идущих усеченных итераций.

Из последовательности $\{u_k\}$ исключим все планы, порождающие усеченные итерации. Останется бесконечная подпоследовательность планов $\{u_{k_j}\}$, порождающих неусеченные итерации.

ТЕОРЕМА 6. *Для векторов $x_{k_j} = Au_{k_j}$ справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{j\to\infty} x_{k_j} = x^*,$$

где x^* — решение задачи (1).

Доказательство. Воспользуемся определением неусеченной итерации и формулой (28). Запишем

$$\delta_{k_j} = \widetilde{\delta}_{k_j} = \frac{\Delta(u_{k_j})}{\|a_{i'_{k_j}} - a_{i''_{k_j}}\|^2} \geqslant \frac{\Delta(u_{k_j})}{d^2}\,,$$

где $d = \max\limits_{i\in 1:m, j\in 1:m} \|a_i - a_j\|$. Подставив это неравенство в (33) при $k = k_j$, получим

$$Q(u_{k_j}) - Q(u_{k_j+1}) \geqslant \frac{\left[\Delta(u_{k_j})\right]^2}{2d^2}\,. \tag{36}$$

Поскольку последовательность $\{Q(u_k)\}$ сходится, то левая часть неравенства (36) стремится к нулю при $j \to \infty$. Отсюда следует, что

$$\lim_{j\to\infty} \Delta(u_{k_j}) = 0. \tag{37}$$

На основании (14) приходим к заключению теоремы. $\square$

Вернемся к предельному соотношению (34) и выясним, чему равна константа α.

ТЕОРЕМА 7. *Справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{k\to\infty} Q(u_k) = Q(u^*),$$

где u^* *— некоторое решение задачи* (2).

Так что $\alpha = Q(u^*)$.

Доказательство. По определению множества планов U задачи (2) последовательность $\{u_{k_j}\}$ ограничена. Из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Не умаляя общности, будем считать, что вся последовательность $\{u_{k_j}\}$ сходится к вектору $\check{u}$,

$$\lim_{j\to\infty} u_{k_j} = \check{u}. \tag{38}$$

Очевидно, что $\check{u}$ — план задачи (2). Покажем, что это оптимальный план.

Достаточно проверить, что $\Delta(\check{u}) = 0$. Допустим противное $\Delta(\check{u}) > 0$. Выберем столь большое J, чтобы при $j \geqslant J$ выполнялись неравенства

$$u_{k_j}[i] > 0 \quad \text{при } i \in I^+(\check{u}), \tag{39}$$

$$\Big|\big(\langle a_i, x_{k_j}\rangle - b[i]\big) - \big(\langle a_i, x^*\rangle - b[i]\big)\Big| < \varepsilon \quad \text{при } i \in 1:m. \tag{40}$$

Здесь выбрано $\varepsilon = \frac{1}{4}\Delta(\check{u})$, x^* — решение задачи (1). В силу (39) имеем $I^+(\check{u}) \subset \subset I^+(u_{k_j})$. Далее

$$\begin{aligned}\Delta(u_{k_j}) = \max_{i\in I^+(u_{k_j})}\big\{\langle a_i, x_{k_j}\rangle - b[i]\big\} - \min_{i\in 1:m}\big\{\langle a_i, x_{k_j}\rangle - b[i]\big\} \geqslant \\ \geqslant \max_{i\in I^+(\check{u})}\big\{\langle a_i, x_{k_j}\rangle - b[i]\big\} - \min_{i\in 1:m}\big\{\langle a_i, x_{k_j}\rangle - b[i]\big\}.\end{aligned}$$

Теперь воспользуемся неравенством (40). Получим

$$\begin{aligned}\Delta(u_{k_j}) \geqslant \max_{i\in I^+(\check{u})}\big\{\langle a_i, x^*\rangle - b[i] - \varepsilon\big\} - \min_{i\in 1:m}\big\{\langle a_i, x^*\rangle - b[i] + \varepsilon\big\} = \\ = \max_{i\in I^+(\check{u})}\big\{\langle a_i, x^*\rangle - b[i]\big\} - \min_{i\in 1:m}\big\{\langle a_i, x^*\rangle - b[i]\big\} - 2\varepsilon.\end{aligned} \tag{41}$$

Из (38) следует, что
$$\lim_{j\to\infty} Au_{k_j} = A\check{u},$$
так что, по теореме 6, $x^* = A\check{u} =: \check{x}$. Заменим в (41) x^* на $\check{x}$. Придем к неравенству
$$\Delta(u_{k_j}) \geqslant \Delta(\check{u}) - 2\varepsilon = \tfrac{1}{2}\,\Delta(\check{u}) > 0.$$
Это противоречит соотношению (37).

Установлено, что $\check{u}$ оптимальный план задачи (2). Будем писать u^* вместо $\check{u}$. На основании (38) по непрерывности получаем
$$\lim_{j\to\infty} Q(u_{k_j}) = Q(u^*).$$
Строгое убывание последовательности $\{Q(u_k)\}$ гарантирует справедливость заключения теоремы. □

ТЕОРЕМА 8 (о сильной сходимости последовательности $\{x_k\}$)**.** *Справедливо предельное соотношение*
$$\lim_{k\to\infty} \|x_k - x^*\| = 0,$$
где x^* *— решение задачи* (1).

Доказательство. Согласно теореме 2 имеем
$$\|x^*\|^2 = \langle x^*, Au^*\rangle = \langle A^T x^*, u^*\rangle = \sum_{i=1}^{m} u^*[i]\big(\big(\langle a_i, x^*\rangle - b[i]\big) + b[i]\big) =$$
$$= \langle b, u^*\rangle + \sum_{i\in I^+(u^*)} u^*[i]\,\mu^* = \langle b, u^*\rangle + \mu^*.$$
Отсюда следует, что
$$\mu^* - \tfrac{1}{2}\,\|x^*\|^2 = \tfrac{1}{2}\,\|x^*\|^2 - \langle b, u^*\rangle = Q(u^*). \tag{42}$$
Аналогично
$$\langle x^*, x_k\rangle = \langle A^T x^*, u_k\rangle = \sum_{i=1}^{m} u_k[i]\big(\big(\langle a_i, x^*\rangle - b[i]\big) + b[i]\big) \geqslant$$
$$\geqslant \langle b, u_k\rangle + \min_{i\in 1:m}\big\{\langle a_i, x^*\rangle - b[i]\big\} = \langle b, u_k\rangle + \mu^*.$$

Теперь запишем
$$\|x_k - x^*\|^2 = \|x_k\|^2 - 2\langle x^*, x_k\rangle + \|x^*\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \|x_k\|^2 - 2\big(\langle b, u_k\rangle + \mu^*\big) + \|x^*\|^2 =$$
$$= 2\big(\tfrac{1}{2}\,\|x_k\|^2 - \langle b, u_k\rangle\big) - 2\big(\mu^* - \tfrac{1}{2}\,\|x^*\|^2\big).$$
Согласно (42) получаем
$$\|x_k - x^*\|^2 = 2\big(Q(u_k) - Q(u^*)\big).$$

Остается сослаться на теорему 7. Теорема доказана. □

6°. Примеры. В этом разделе приведено пять примеров на применение MDM-алгоритма к решению задачи Сильвестра на плоскости. Вычисления заканчивались, когда на очередном приближение u_{k+1} выполнялось хотя бы одно из условий:

$$\sqrt{\Delta(u_{k+1})} < 5 \cdot 10^{-3} \tag{43}$$

или

$$\|x_k - x_{k+1}\| < 10^{-5}. \tag{44}$$

Используется обозначение $R_k = \sqrt{-2Q(u_k)}$ для приближенного значения радиуса минимального шара.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим три точки, лежащих на окружности, с центром в начале координат и радиуса 2 (на рис. 1 точки синего цвета):

$$a_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}. \tag{45}$$

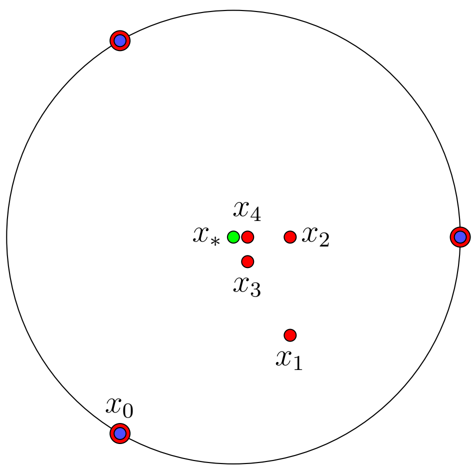

Рис. 1. Ход решения

В качестве начального приближения u_0 взят вектор $(1, 0, 0)$, что соответствует $x_0 = a_1$. Вычисления закончились при выполнении условия (43). На рис. 1 зеленым цветом отмечено решение задачи. Точки на окружности, выделенные красным цветом, являются опорными.

Ниже в виде графиков приведены результаты расчетов. Всюду по оси абсцисс указывается номер итерации.

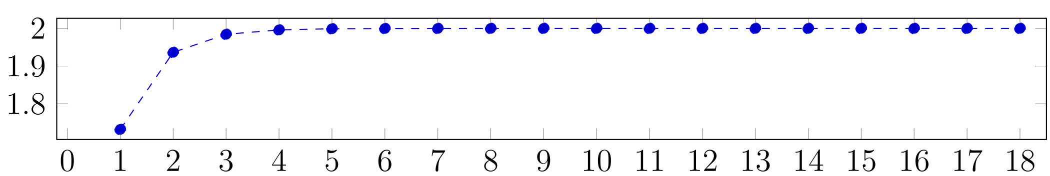

Рис. 2. График последовательности R_k

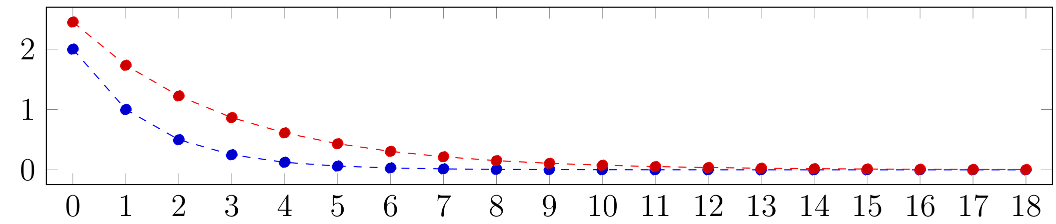

Рис. 3. Графики оценок • $\|x_k - x_*\|$ и • $\sqrt{\Delta(u_k)}$

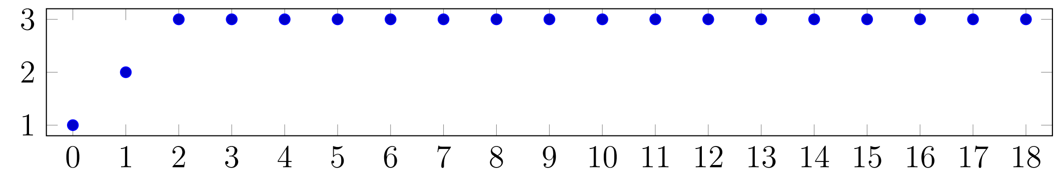

Рис. 4. График последовательности $|I^+(u_k)|$

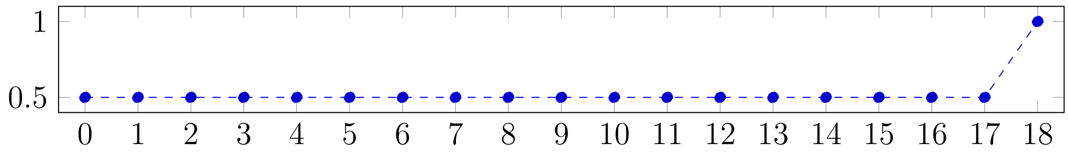

Рис. 5. График отношения $\frac{\|x_{k+1}-x_*\|}{\|x_k-x_*\|}$

Рассмотрим другие способы выбора стартовой точки. В качестве начального приближения можно взять центр тяжести заданной системы $a_1, \ldots, a_m$, а именно вектор u_0 с компонентами $u_0[i] = \frac{1}{m}$, $i \in 1 : m$. Можно поступить иначе: искусственно к исходному набору точек добавить еще одну точку $a_{m+1} := \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} a_i$ и в качестве начального приближение взять вектор u_0 с компонентами $u_0[i] = 0$, $i \in 1 : m$, $u_0[m+1] = 1$.

На рисунках 6–10 приведены результаты расчета для набора точек (45). Начальное приближение строилось с привлечением дополнительной точки. В качестве u_0 был выбран план $(0, 0, 0, 1)$, что соответствует $x_0 = a_4 = \mathbf{0}$.

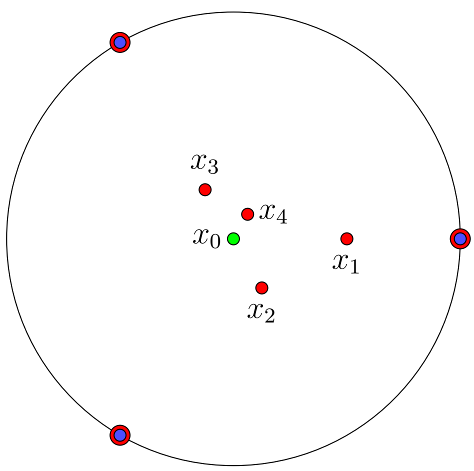

Рис. 6. Ход решения

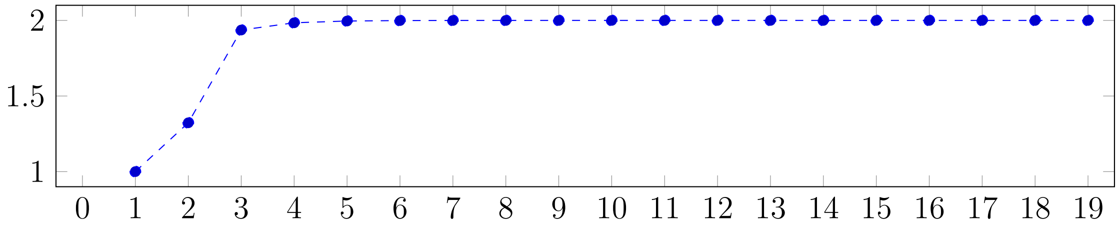

Рис. 7. График последовательности R_k

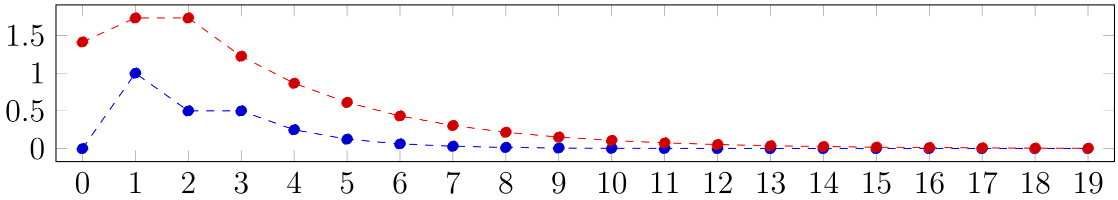

Рис. 8. Графики оценок • $\|x_k - x_*\|$ и • $\sqrt{\Delta(u_k)}$

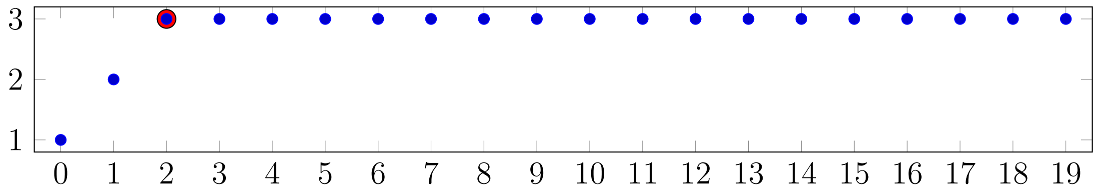

Рис. 9. График последовательности $|I^+(u_k)|$

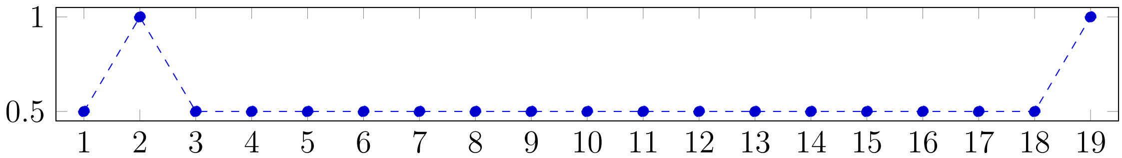

Рис. 10. График отношения $\frac{\|x_{k+1}-x_*\|}{\|x_k-x_*\|}$

На рис. 8 видно, что план u_0 не является оптимальным, т. к. $\sqrt{\Delta(u_0)} > 0$, хотя соответствующая ей точка $x_0 = \mathbf{0}$ является решением исходной задачи. Оптимальным планом будет вектор $(1/3, 1/3, 1/3, 0)$.

На рис. 9 красным цветом выделена усеченная итерация.

Вычисления закончились по условию (43).

ПРИМЕР 2. Рассмотрим пример, когда генерировалось 15 случайных точек, лежащих внутри и на границе круга $(x-20)^2 + (y-30)^2 \leqslant 10$ (см. рис. 11).

В качестве начального приближения u_0 была выбрана одна из исходных точек. Результаты расчетов представлены на графиках 11–15. Вычисления были остановлены по достижению неравенства $\sqrt{\Delta(u_{15})} < 0.005$.

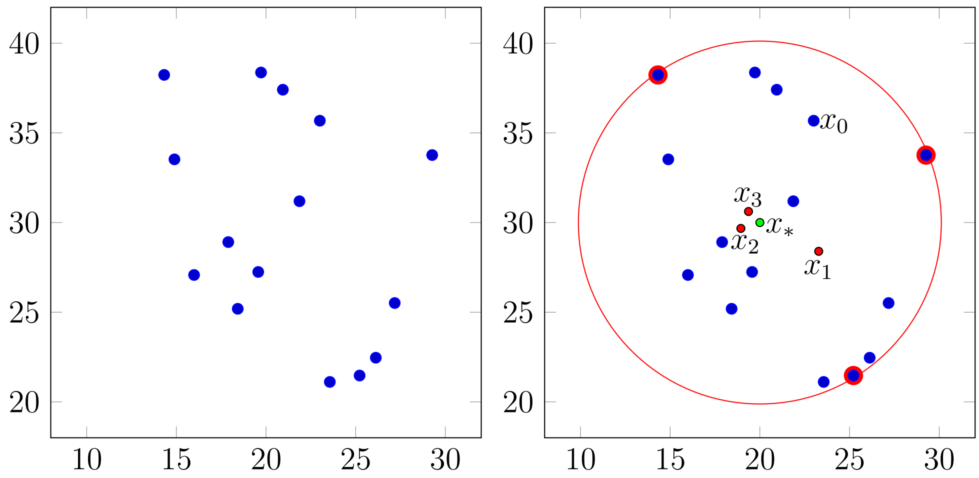

Рис. 11. Исходные данные и решение задачи

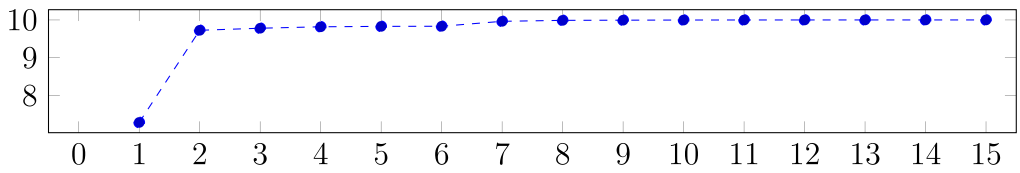

Рис. 12. График последовательности R_k

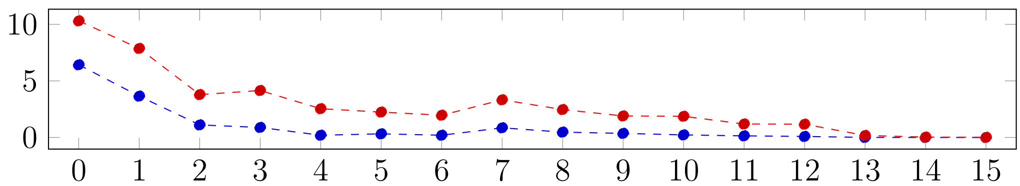

Рис. 13. Графики оценок • $\|x_k - x_*\|$ и • $\sqrt{\Delta(u_k)}$

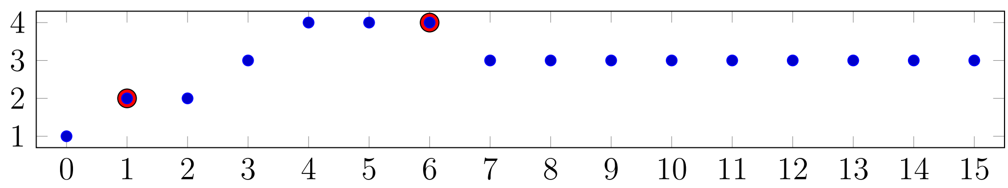

Рис. 14. График последовательности $|I^+(u_k)|$

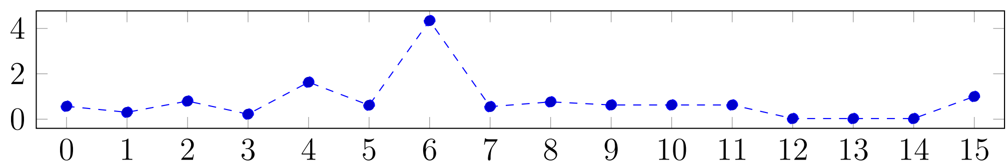

Рис. 15. График отношения $\frac{\|x_{k+1}-x_*\|}{\|x_k-x_*\|}$

ПРИМЕР 3. Допустим, что нужно выяснить, лежит ли данный набор точек на окружности. Это можно сделать, решая соответствующую задачу Сильвестра.

В примере генерировалось 9 случайных точек, лежащих на границе круга $(x-20)^2+(y-30)^2 \leqslant 10$ (см. рис. 16). На графиках 17–20 представлены результаты решения задачи Сильвестра, когда в качестве начального приближения выбрана одна из исходных точек. Вычисления закончились на 12-й итерации при выполнении правила останова (44).

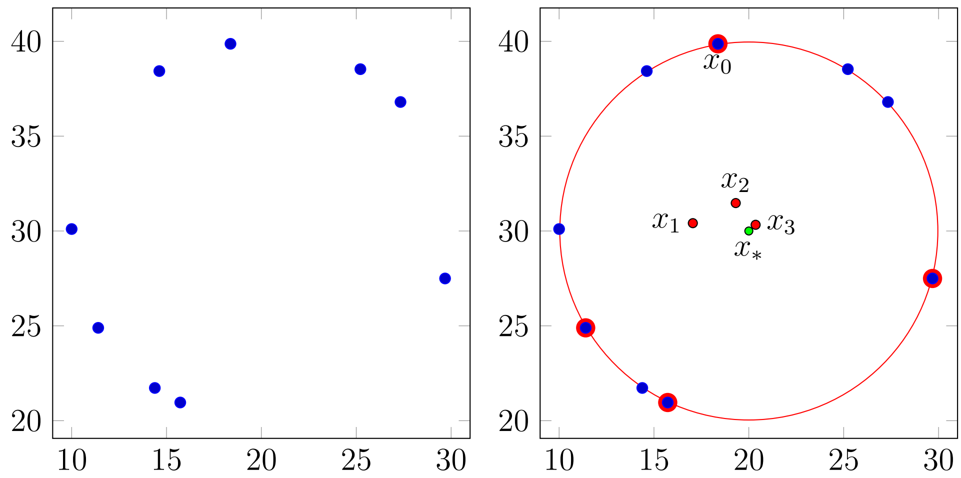

Рис. 16. Исходные данные и решение задачи

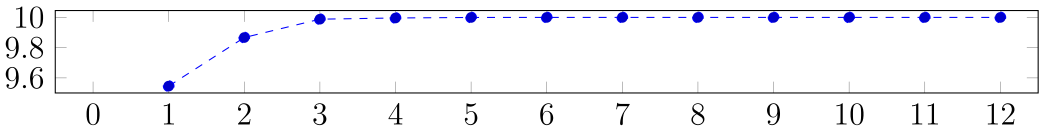

Рис. 17. График последовательности R_k

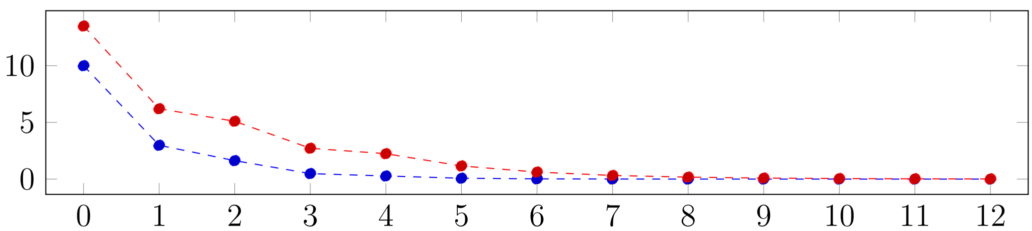

Рис. 18. Графики оценок • $\|x_k - x_*\|$ и • $\sqrt{\Delta(u_k)}$

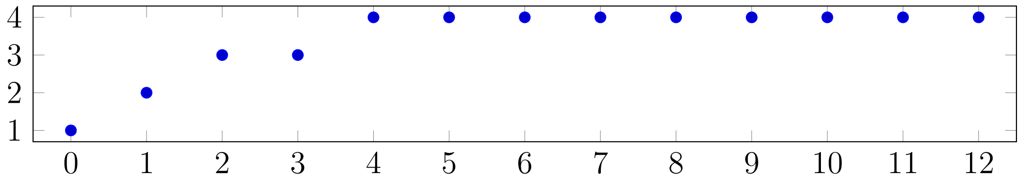

Рис. 19. График последовательности $|I^+(u_k)|$

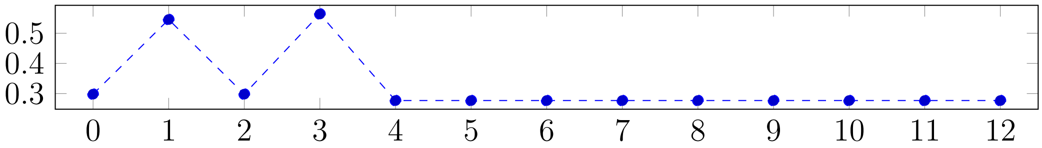

Рис. 20. График отношения $\frac{\|x_{k+1}-x_*\|}{\|x_k-x_*\|}$

ПРИМЕР 4. В примере генерировалось 10 случайных точек, лежащих в круге $(x-20)^2+(y-30)^2 \leqslant 10$ (см. рис. 21). На графиках 21–25 представлены результаты решения задачи Сильвестра, когда в качестве начального приближения выбран центр тяжести исходных точек. Вычисления закончились на 24-й итерации при выполнении правила останова (43).

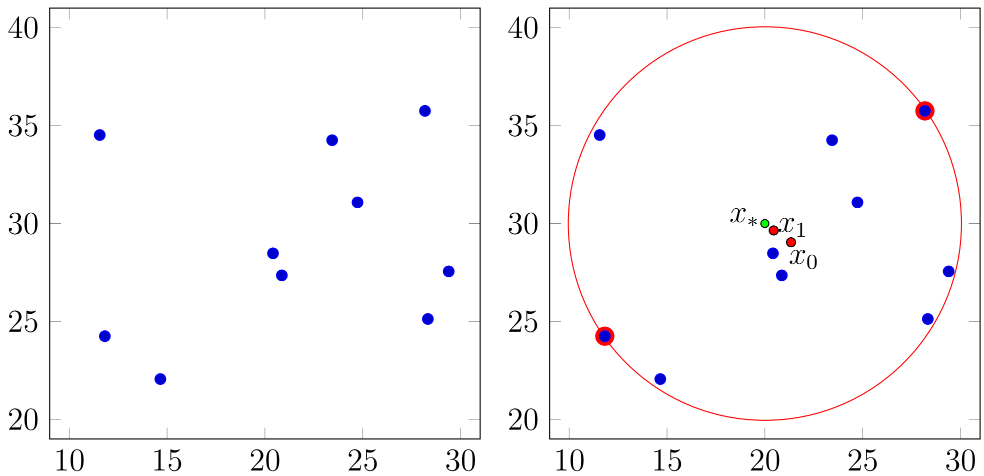

Рис. 21. Исходные данные и решение задачи

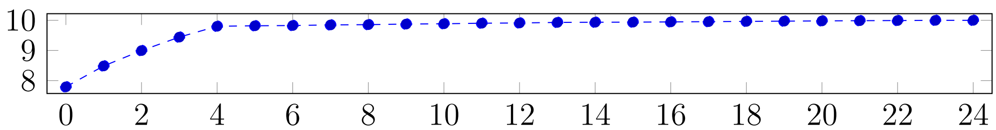

Рис. 22. График последовательности R_k

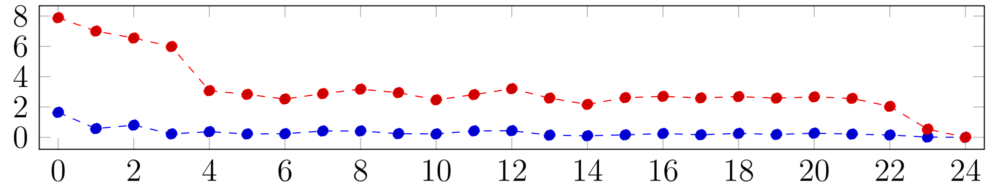

Рис. 23. Графики оценок • $\|x_k - x_*\|$ и • $\sqrt{\Delta(u_k)}$

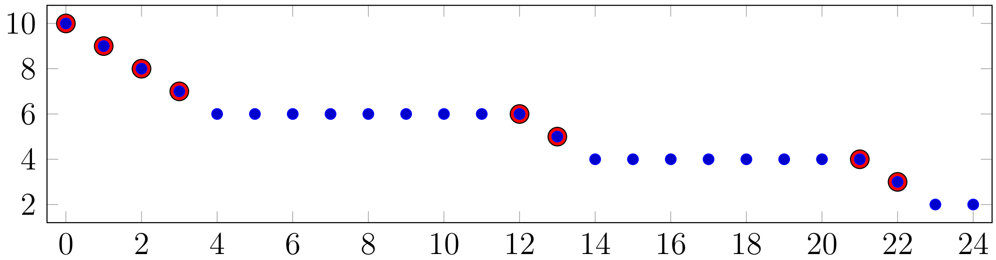

Рис. 24. График последовательности $|I^+(u_k)|$

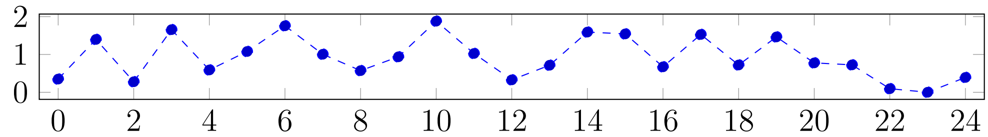

Рис. 25. График отношения $\frac{\|x_{k+1}-x_*\|}{\|x_k-x_*\|}$

ПРИМЕР 5. В этом примере генерировалось 100 случайных точек, лежащих в круге $(x-20)^2+(y-30)^2 \leqslant 10$ (см. рис. 26). На графиках 26–28 представлены результаты расчетов. В качестве начального приближения выбрана одна из исходных точек. Вычисления закончились на 71-й итерации при выполнении правила останова (44).

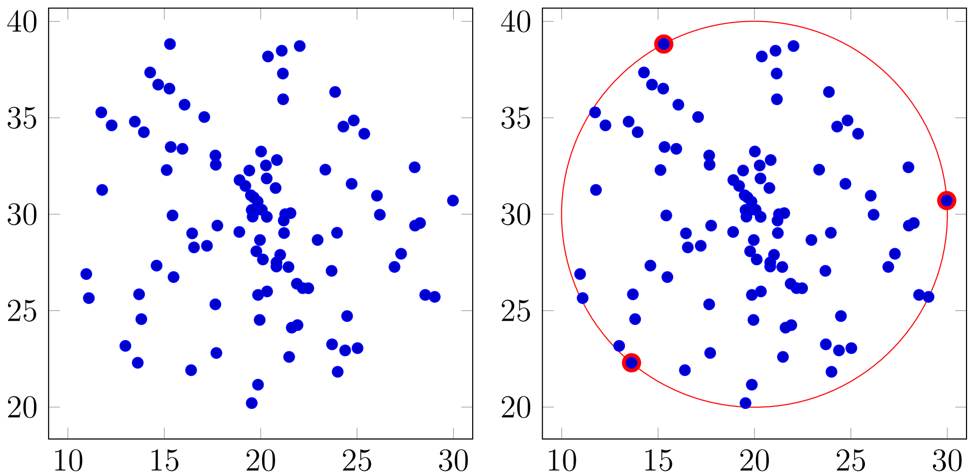

Рис. 26 Исходные данные и решение задачи

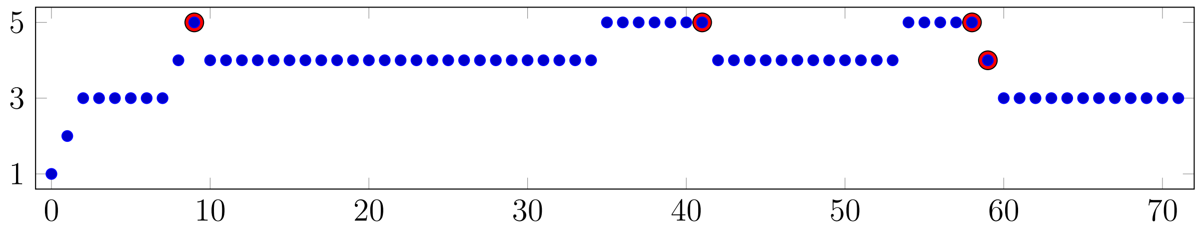

Рис. 27. График последовательности $|I^+(u_k)|$

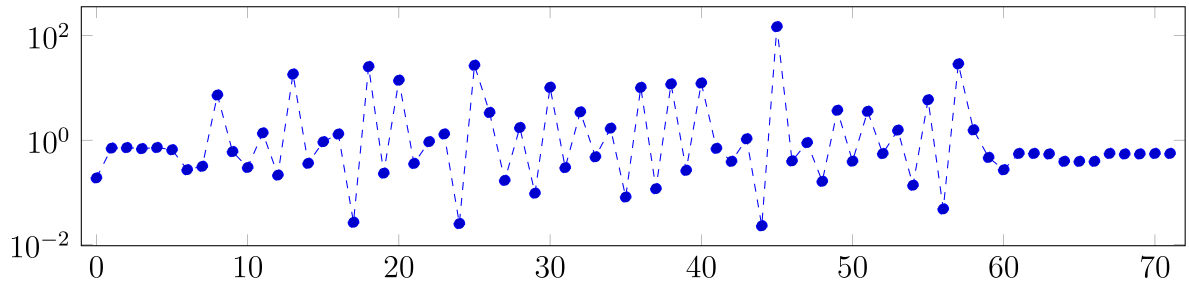

Рис. 28. График отношения $\frac{\|x_{k+1}-x_*\|}{\|x_k-x_*\|}$

З а м е ч а н и е 1. Эффективность MDM-алгоритма решения задачи Сильвестра зависит от величины $|I^+(u^*)|$. Наиболее благоприятный случай, когда $|I^+(u^*)| = n + 1$.

З а м е ч а н и е 2. Если план u_k порождает усеченную итерацию, то при переходе от u_k к u_{k+1} мощность $|I^+(u_k)|$ уменьшается на единицу при $u_k[i'_k] > 0$ и остается прежней при $u_k[i'_k] = 0$ (см. доказательство леммы).

В заключение отметим, что численные методы решения задачи Сильвестра рассматривались также в работах [2, 3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н., Соловьёва Н. А., Тамасян Г. Ш. *MDM-алгоритм и задача Сильвестра. I* // Семинар «O & ML». Избранные доклады. 14 сентября 2023 г. (`http://oml.cmlaboratory.com/reps23.shtml#0914`)

2. Кольцов М А. *Решение задачи Сильвестра в MATLAB* // Семинар «CNSA & NDO». Избранные доклады. 26 февраля 2015 г. (`http://cnsa.cmlaboratory.com/reps15.shtml#0226`)

3. Yildirim E. A. *Two algorithms for the minimum enclosing ball problem* // SIAM J. Optim. 2008. Vol. 19. No 3. Pp. 1368–1391.